Matemática

Bloque 1: Álgebra

Clase 1 – Martes 21-3

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

CLASE	SEMANA	TEMA DE LA SEMANA	PRÁCTICA
1	20-mar	Tema 1: Ecuaciones. Resolución por factorización y ecuaciones por sustitución de una variable. Ecuaciones fraccionarias	Trabajo Práctico N° 1: ecuaciones y desigualdades (primer parte)
2	27-mar	Tema 2: Desigualdades. Intervalos	Trabajo Práctico N° 1: ecuaciones y desigualdades (segunda parte)

ECUACIONES

Ecuaciones

- ✓ Resolución de ecuaciones por factorización
- ✓ Ecuaciones por sustitución de una variable
- ✓ Ecuaciones fraccionarias

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

ECUACIONES…..
…RECORDAMOS!!!

Enunciado en el que se establece que las expresiones matemáticas son iguales.

La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el algebra contienen ***variables*** (letras que representan números).

El objetivo es determinar el valor de la ***variable (incógnita)*** que hace que la ecuación sea cierta. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman ***soluciones de la ecuación.***

Llamaremos ***conjunto solución*** al conjunto que contiene todas las soluciones de la ecuación.

El proceso para determinar las soluciones se llama ***resolución de una ecuación***.

ECUACIONES…..
…RECORDAMOS!!!

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Dos ecuaciones con las mismas soluciones se llaman ***ecuaciones equivalentes***.

Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable este sola en un lado del signo de “igual”.

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

ECUACIONES…..

…RECORDAMOS!!!

¿Es x=3 solución de la ecuación $x^2 + x - 12 = 0$?

¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $3x + 4 = 2x - 7$?

Resolución de ecuaciones por factorización

Cuando se multiplican dos o más números, el producto dará cero si al menos uno de los factores vale cero. También vale que si el producto de dos o más números es cero, al menos uno de los factores será cero.
Es decir:

Para cualesquiera números reales a y b, se cumple:

$$\boldsymbol{a \cdot b = 0 \ \text{sí y sólo sí} \ a = 0 \ \text{ó} \ b = 0}$$

Nuestro objetivo es utilizar este resultado para resolver ecuaciones.

Resolución de ecuaciones por factorización

Ejemplo 1:

$$(x-3)(4x+1)=0$$

Ejemplo 2:

$$5x(-2x+1)=x^2(-2x+1)$$

Ejemplo 3:

$$x^3+2x^2-8x=0$$

Para resolver estar ecuaciones, vamos a operar de tal forma que quede una ecuación igualada a 0 y luego factorizar, para obtener una **ecuación equivalente de la forma**:

$$\boldsymbol{a \cdot b = 0}$$

Resolución de ecuaciones por sustitución de una variable

En algunas oportunidades nos podemos encontrar con ecuaciones del tipo:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 0$$

Que a simple vista no es fácil de factorizar, pero nos damos cuenta de que, si pudiéramos cambiarla un poco, utilizando las propiedades de la potencia, que repasamos en el curso de ingreso, podemos reescribirla. Por ejemplo:

$$\left(x^2\right)^2 + 4x^2 + 4 = 0$$

Podríamos llamar $\boldsymbol{t}$ a la $\boldsymbol{x^2}$ (esta sustitución se llama usualmente cambio de variable o sustitución de variable, porque cambiamos la variable original (x) por una nueva (t)

$$\boxed{t^2 + 4t + 4 = 0} \longrightarrow$$ **Ecuación en la nueva variable**

Resolución de ecuaciones por sustitución de una variable

Existen algunas ecuaciones que a simple vista no podemos resolver por factorización, Bhaskara o algunos de los métodos repasados en el curso de ingreso. A veces encontramos una ***sustitución*** o ***cambio de variable*** mediante la cual se obtiene una ecuación en la nueva variable que resulta más simple de resolver. A este procedimiento de cambiar la variable original por otra que nos resulte de utilidad, lo llamamos resolución por sustitución o cambio de una variable.

Luego de resolver la ecuación "más sencilla", es necesario "volver" a la variable original.

Resolución de ecuaciones por sustitución de una variable

Ejemplo 1: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Ejemplo 2: $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$

Ejemplo 3: $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

Ecuaciones fraccionarias

Son ecuaciones donde la incógnita aparece en el denominador.

Para resolver estar ecuaciones, vamos a operar como con expresiones algebraicas fraccionarias, hasta convertir la ecuación fraccionaria en otra ecuación no fraccionaria.

Entre las soluciones de esta nueva ecuación estarán las soluciones de la ecuación original.

Ecuaciones fraccionarias

Ejemplo 1:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x^2} = 0$$

¡Repasar suma de Expresiones Fraccionarias!

Ejemplo 2:

$$\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = -1$$

Matemática

Clase 2 – Martes 28-3

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
Universidad Nacional de La Plata

Cronograma

CLASE	SEMANA	TEMA DE LA SEMANA	PRÁCTICA
1	20-mar	Tema 1: Ecuaciones. Resolución por factorización y ecuaciones por sustitución de una variable. Ecuaciones fraccionarias	Trabajo Práctico N° 1: ecuaciones y desigualdades (primer parte)
2	27-mar	Tema 2: Desigualdades. Intervalos	Trabajo Práctico N° 1: ecuaciones y desigualdades (segunda parte)

INTERVALOS Y DESIGUALDADES

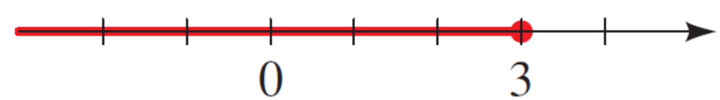
¿A QUÉ SE LLAMA
“INTERVALO”?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Definición de intervalo:

*Se llama **Intervalo** a un subconjunto de la recta real: un segmento, una semirrecta o la misma recta.*

Ejemplos:



Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿A QUÉ SE LLAMA “INTERVALO”?

Sean a y b dos números reales y supongamos que a < b.

El conjunto de números x tales que x *es mayor que* a y *menor que* b se llama **INTERVALO ABIERTO** entre a y b y se lo denota **(a, b).**

$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$$

El conjunto de números x tales x *es mayor o igual que* a y *menor o igual que* b se llama **INTERVALO CERRADO** entre a y b y se denota **[a, b].**

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$$

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

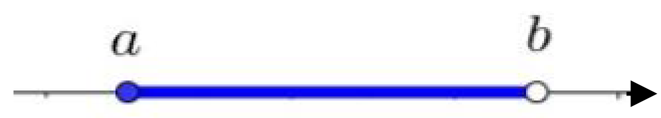
Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿A QUÉ SE LLAMA “INTERVALO”?

Sean a y b dos números reales y supongamos que a < b.

El conjunto de números x tales que x *es mayor o igual que a* y *menor que* b se llama **INTERVALO SEMICERRADO A IZQUIERDA** entre a y b y se denota **[a, b).**

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$



El conjunto de números x tales que x *es mayor que* a y *menor o igual que* b se llama **INTERVALO SEMICERRADO A DERECHA** entre a y b y se denota **(a, b].**

$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

Los números a y b se llaman puntos **extremos del intervalo**

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿A QUÉ SE LLAMA "INTERVALO"?

Sean a y b dos números reales.

El conjunto de números x tales que x *es mayor que* a

$(a, \infty) = \{x \in R: a < x\}$

El conjunto de números x tales que x *es mayor o igual que* a.

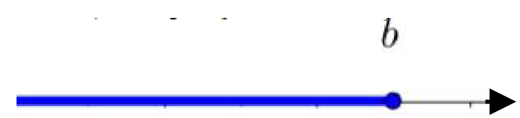
$[a, \infty) = \{x \in R: a \leq x\}$

El conjunto de números x tales que x *es menor que* b.

$(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$

El conjunto de números x tales que x *es menor o igual que* b.

$(-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b$



Ejemplos

¿$-1 \in [-2,8)$?

¿$8 \in [-2,8)$?

Representar gráficamente los intervalos [-1,4) y (-∞,3] y expresarlos como conjuntos

Determinar un intervalo que contenga al -1, al 0 pero no al 1, ¿es único?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Cuáles son los valores de x que cumplen que $x+3<0$?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¡¡¡ESTO NO ES UNA ECUACIÓN!!!
ENTONCES…¿CÓMO BUSCO LOS VALORES PEDIDOS?

Los enunciados matemáticos en los que figura alguno de los símbolos $< \; > \; \leq \; \geq$ se llaman **DESIGUALDADES (O INECUACIONES)**

Una **solución** de una desigualdad es cualquier número que la hace cierta.

El conjunto de todas las soluciones se llama **conjunto solución**.

Resolver una desigualdad que contiene una variable significa encontrar todas las soluciones.

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿CÓMO VAMOS A HACER PARA RESOLVER DESIGUALDADES?

VAMOS A USAR ALGUNAS PROPIEDADES … Y ALGO MÁS!!!

- ***Propiedad aditiva*:**

Si $a < b$ es cierta, entonces:

$a + c < b + c$ es cierta para cualquier **número real c**

- ***Propiedad multiplicativa:***

Si $a < b$ es cierta, entonces:

$a \cdot c < b \cdot c$ es cierta para cualquier número **real positivo c**.

$a \cdot c > b \cdot c$ es cierta para cualquier número **real negativo c**.

Lo mismo puede decirse si en vez de < hubiera alguno de los símbolos > ≤ ≥

¿CÓMO VAMOS A HACER PARA RESOLVER DESIGUALDADES?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

- ***Propiedad de recíprocos*:**

Dados $a > 0$ y $b > 0$. Si $a < b$ es cierta, entonces se cumple que:

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Lo mismo puede decirse si en vez de < hubiera alguno de los símbolos > ≤ ≥

Ejemplos

Ejemplo 1: $16 - 7y \geq 10y - 4$

Ejemplo 2: $-3 \leq 3c - 4 \leq 2c$

Ejemplo 3: $(x+1)(x-4) < 0$

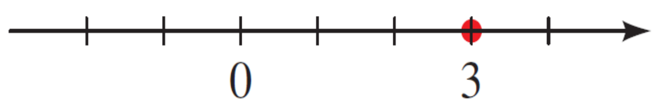
Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Observemos

Recordamos un ejemplo de **ecuación** y lo comparamos con una **desigualdad**:

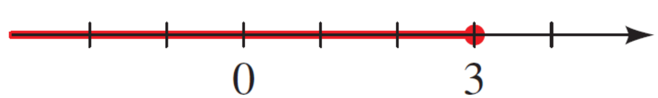
Ecuación: $4x + 7 = 19$ Solución: $x = 3$

Gráfica:



Desigualdad: $4x + 7 \leq 19$ Solución: $x \leq 3$

Gráfica:



Observemos

A diferencia de lo que sucede en una **ecuación,** una **desigualdad** por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos

Matemática

Clase 3 – Martes 4-4

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

3	3-abr	Tema 3: Matrices: Definiciones. Operaciones con matrices	Trabajo Práctico N°2: Matrices	jueves 6 y viernes 7 feriados
4	10-abr	Tema 3: Matrices: determinante y matriz inversa	Trabajo Práctico N°2: Matrices	

MATRICES

Se denomina **MATRIZ** de nxm a toda disposición rectangular numérica de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

FILAS DE LA MATRIZ

ELEMENTOS DE LA MATRIZ

COLUMNAS DE LA MATRIZ

El índice i indica la fila
El índica j indica la columna

donde a_{ij} son **<u>números reales</u>**, para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $j = 1, \ldots, m$

DIMENSIÓN DE LA MATRIZ: $\boldsymbol{n \ x \ m}$ (cantidad de filas por cantidad de columnas)

También se dice que la matriz es de **<u>orden</u>** $\boldsymbol{n \ x \ m}$

Ejemplos:

a) Indicar sus dimensiones.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ -5 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & t-1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1/2 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Completar:

$l_{23} =$

$l_{11} =$

$p_{22} =$

$m_{13} =$

$n_{23} =$

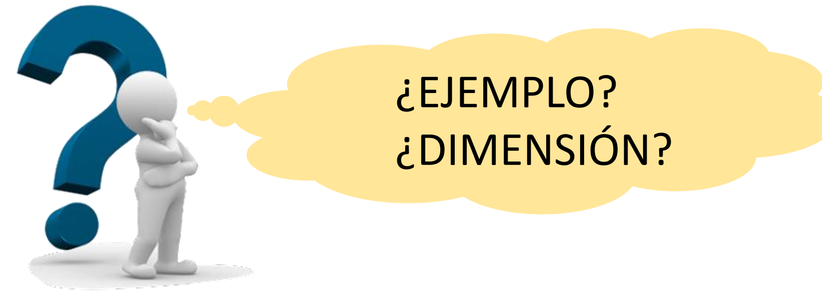
$n_{32} =$

VAMOS A DEFINIR
ALGUNAS MATRICES
PARTICULARES

- ✓ Matriz fila
- ✓ Matriz columna
- ✓ Matriz nula
- ✓ Igualdad de matrices
- ✓ Matriz traspuesta
- ✓ Matriz cuadrada
  - ✓ Matriz diagonal
  - ✓ Matriz identidad

MATRIZ FILA

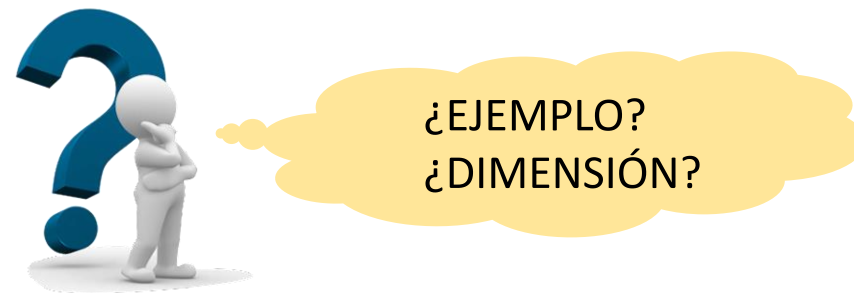
Matriz que tiene una sola fila



Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

MATRIZ COLUMNA

Matriz que tiene una sola columna



Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

MATRIZ NULA

Matriz cuyos elementos son todos ceros

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{n\ x\ m}$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales, es decir:

$$\boldsymbol{A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1 \cdots n, \quad \forall j = 1 \cdots m}$$

Imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay

¡¡¡SOLO ES POSIBLE CONSIDERAR LA IGUALDAD ENTRE MATRICES SI TIENEN EL MISMO ORDEN!!!

Ejemplo:

A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4-x & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & y+5 \\ 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Existen valores de **x** y de **y** de manera que A=B?

MATRIZ TRASPUESTA

Se llama matriz traspuesta de una matriz A de $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{m}$ a la matriz A^T de $\boldsymbol{m}$ $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{n}$ donde *las filas de* A^T *son las columnas de* A.

Ejemplo:

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿ A^T ?

MATRIZ CUADRADA

Es una matriz en la cual la cantidad de filas coincide con la cantidad de columnas

MATRIZ DIAGONAL

Llamamos *diagonal principal* de una **matriz cuadrada** de $\boldsymbol{n \ x \ n}$ a los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

Se denomina *matriz diagonal* a una **matriz cuadrada** cuyos elementos, fuera los de su diagonal principal, son ceros.

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿EJEMPLO?

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Se denomina ***matriz identidad*** a una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos.

Imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay

¡¡LA MATRIZ IDENTIDAD ES SIEMPRE *CUADRADA*!!

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿EJEMPLO?
¿DIMENSIÓN?

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

¿VERDADERO O FALSO?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

- $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
- 0,5 y 1 son los elementos de la diagonal principal
- El elemento a_{23} es 2

AHORA VAMOS A DEFINIR OPERACIONES ENTRE MATRICES

- ✓ Suma entre matrices
- ✓ Producto de un escalar por una matriz
- ✓ Producto entre matrices

Y TAMBIÉN VAMOS A VER ALGUNAS PROPIEDADES DE ESTAS OPERACIONES

SUMA DE MATRICES

Dadas las matrices A y B de n×m, se define la matriz ***SUMA DE A y B,*** a una nueva matriz $C = A + B$ cuyos elementos son c_{ij} cumplen:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall i = 1 \cdots n, \quad \forall j = 1 \cdots m$$

Imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay

¡¡¡PARA PODER SUMAR MATRICES TIENEN QUE TENER EL MISMO ORDEN!!!

¿$A + B$?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Ejemplo:

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales | UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

ALGUNAS PROPIEDADES…

CONMUTATIVIDAD

Para todo par de matrices A y B **del mismo orden**, se cumple:

$$A + B = B + A$$

ASOCIATIVIDAD

Para toda terna de matrices A, B y C **del mismo orden**, se cumple:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de orden $\boldsymbol{n} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{m}$ y sea $\boldsymbol{k}$ un número real, se define la matriz ***PRODUCTO DE k POR A***, a una nueva matriz $\boldsymbol{B}$ de orden $\boldsymbol{n} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{m}$ que cumple:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{b}_{ij} = \mathrm{k} \cdot \boldsymbol{a}_{ij} \ ; \ \forall \boldsymbol{i} = \mathbf{1} \cdots \boldsymbol{n}, \quad \forall \boldsymbol{j} = \mathbf{1} \cdots \boldsymbol{m}$$

Es decir:

$$B = kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad k=3$$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

$¿\,3A?$

PRODUCTO DE MATRICES

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de orden $\boldsymbol{n\ x\ m}$ y $\boldsymbol{B}$ una matriz de orden $\boldsymbol{m\ x\ p}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

Definimos el producto $\boldsymbol{AB}$ como una nueva matriz de orden $\boldsymbol{n\ x\ p}$ cuyos elementos son:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1 \cdots n, \quad \forall j = 1 \cdots p$$

Imagen de Christian Dorn en Pixabay

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

A es de n x m $\qquad$ B es de m x p

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times p}$$

$$=$$

$$n \times p$$

El número de ***columnas de A*** debe ser igual al número de ***filas de B***

La matriz resultante tiene ***igual número de filas que A*** e ***igual número de columnas que B***

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1 \cdots n, \quad \forall j = 1 \cdots p$$

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$¿AB?$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

ALGUNAS PROPIEDADES…

(Siempre que el orden de las matrices permitan realizar las operaciones)

ASOCIATIVIDAD

Para toda terna de matrices ***A***, ***B*** y ***C***, se cumple que:

$$\mathrm{A(BC) = (AB)C}$$

DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO EN LA SUMA

Para toda terna de matrices ***A***, ***B*** y ***C***, se cumple que:

$$\mathrm{A(B + C) = AB + AC}$$

Dada cualquier matriz cuadrada ***A*** de orden ***n x n***, y la matriz identidad del mismo orden se cumple:

$$\mathrm{AI = IA = A}$$

Imagen de Gerd Altmann en Pixabay

¡¡¡ALGUNAS COSAS  SUCEDEN!!!

Con respecto al producto de matrices….

NO SE CUMPLE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$AB \neq BA$$

QUE $A \cdot B = 0$ *NO IMPLICA* QUE $A = 0$ o $B = 0$

Matemática

Clase 4 – Martes 11-4

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

3	3-abr	Tema 3: Matrices: Definiciones. Operaciones con matrices	Trabajo Práctico N°2: Matrices	jueves 6 y viernes 7 feriados
4	10-abr	Tema 3: Matrices: determinante y matriz inversa	Trabajo Práctico N°2: Matrices	

VIMOS LA CLASE PASADA

- ✓ Definición de matriz
- ✓ Dimensión de una matriz
- ✓ Elementos de una matriz
- ✓ Matriz fila
- ✓ Matriz columna
- ✓ Matriz nula
- ✓ Igualdad de matrices
- ✓ Matriz transpuesta
- ✓ Matriz cuadrada
  - ✓ Matriz diagonal
  - ✓ Matriz identidad
- ✓ Suma entre matrices
- ✓ Producto de un escalar por una matriz
- ✓ Producto entre matrices

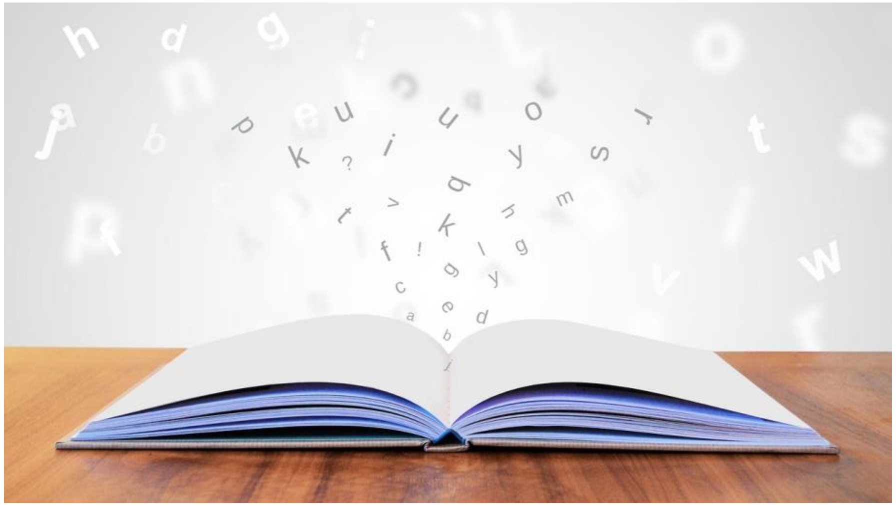


Imagen de Mediamodifier en Pixabay

Recordamos….

Las **MATRICES CUADRADAS** son aquellas matrices con igual número de filas y de columnas

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Para cada matriz cuadrada $\mathbf{A}$ existe un número llamado **determinante de la matriz**. El determinante de una matriz se denota por $\det \mathbf{A}$ o por $|\mathbf{A}|$.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

De una Matriz de orden 1x1:

El determinante de una matriz $\mathbf{A} = \left(a_{11}\right)$ de 1×1 se define:

$$\det\ \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}$$

¿EJEMPLO?

$$A = (-2) \longrightarrow |A| =$$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

CÁLCULO DE DETERMINANTES

De una Matriz de orden 2x2:

El determinante de una matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2×2 se define:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| =$$

¿EJEMPLO?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

CÁLCULO DE DETERMINANTES

¿Cómo se calcula el determinante de una matriz de **orden mayor a 2**?

Vamos a necesitar definir algunos conceptos antes…

- ✓ Menor complementario de un elemento
- ✓ Cofactor de un elemento

CÁLCULO DE DETERMINANTES

<u>Menor complementario de un elemento a_{ij}</u> :

Sea A una matriz cuadrada de orden n,

Se llama **MENOR COMPLEMENTARIO** del elemento a_{ij} de A, al determinante de la matriz de orden n-1 que se obtiene de **eliminar la fila** i y la **columna** j a la matriz original.

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Cofactor de un elemento a_{ij} :

Sea A un matriz cuadrada de orden n.

Se llama **COFACTOR** del elemento a_{ij} de A, al producto del ***menor complementario*** de a_{ij} por (-1^{i+j})

¿EJEMPLO?

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

CÁLCULO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN N

Para calcular el determinante de una **matriz cuadrada de orden n**:

- ✓ Se elige una fila o columna.
- ✓ Se suman los productos de sus elementos por los cofactores correspondientes.
- ✓ Así se plantean determinantes de matrices de orden **n-1**.
- ✓ Se vuelve a aplicar el método a las matrices de orden **n-1** hasta llegar a plantear determinantes de matrices de **2x2**.
- ✓ Los determinantes de las matrices de 2x2 se obtienen como vimos anteriormente

CÁLCULO DE DETERMINANTES

De una Matriz de orden 3x3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se elije una fila o columna (por ejemplo la fila 1)

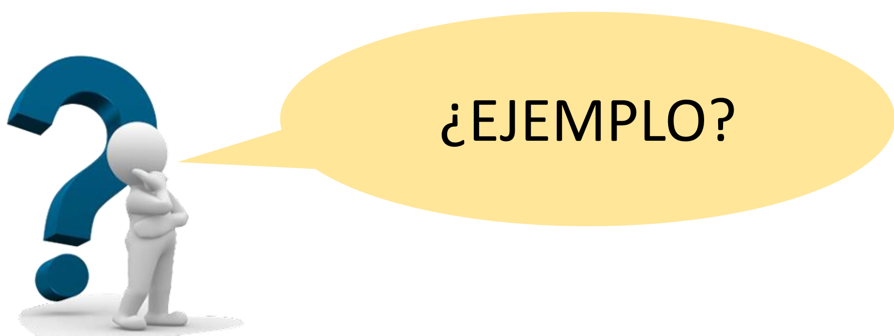
$$\det \mathbf{A} = a_{11}\, cof(a_{11}) + a_{12}\, cof(a_{12}) + a_{13}\, cof(a_{13})$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

CÁLCULO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN N

Para calcular el determinante de una **matriz cuadrada de orden n**:

- ✓ Se elige una fila o columna.
- ✓ Se suman los productos de sus elementos por los cofactores correspondientes.
- ✓ Así se plantean determinantes de matrices de orden **n-1**.
- ✓ Se vuelve a aplicar el método a las matrices de orden **n-1** hasta llegar a plantear determinantes de matrices de **2x2**.
- ✓ Los determinantes de las matrices de 2x2 se obtienen como vimos anteriormente



Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

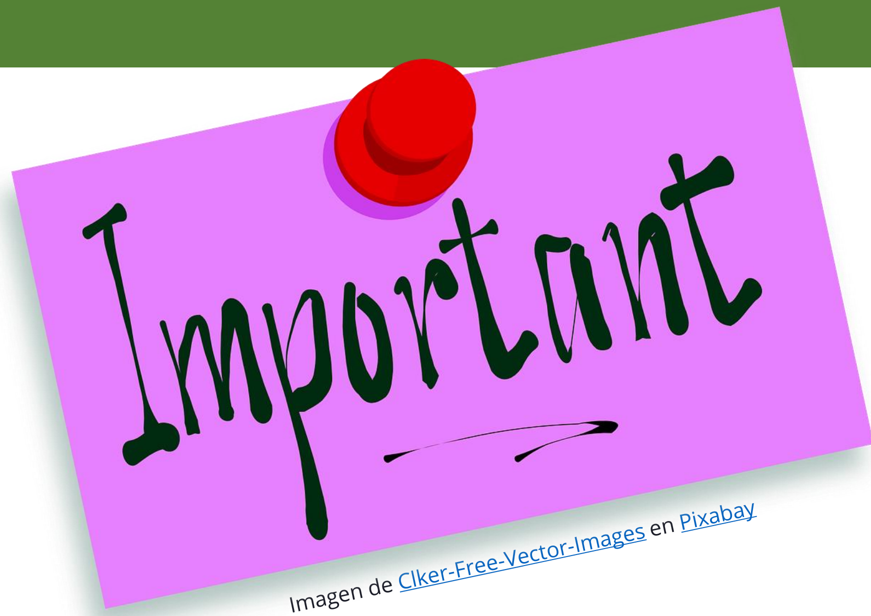


Imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay

El determinante de una matriz no cambia si se lo desarrolla por cualquier fila o cualquier columna.

¡¡¡CONVIENE HACERLO POR LA FILA O COLUMNA QUE TENGA MÁS CEROS!!!

MATRIZ INVERSA

Se llama **matriz inversa** de una matriz A cuadrada de orden n a la matriz cuadrada B de orden n tal que $AB = BA = I$, donde I es la matriz identidad de orden n.

A la matriz inversa de A se la denota A^{-1}

- ✓ Para calcular el determinante, la matriz debe ser **CUADRADA**
- ✓ $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$

MATRIZ INVERSA

RESULTADO IMPORTANTE (TEOREMA)

Una matriz A cuadrada de orden n tiene inversa si y sólo si el $|A| \neq 0$

MATRIZ ADJUNTA

Se llama **matriz ADJUNTA** de la matriz A de orden n, a la matriz **traspuesta** de orden n de la matriz **cuyos elementos son los cofactores de la matriz** A.

Se la denota *Adj(A).*

Es decir:

$$\mathbf{Adj(A)} = \begin{pmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{12}) & \cdots & cof(a_{1n}) \\ cof(a_{21}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{2n}) \\ \vdots & & & \vdots \\ cof(a_{n1}) & cof(a_{n2}) & \cdots & cof(a_{nn}) \end{pmatrix}^T$$

MATRIZ ADJUNTA

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Cómo son los cofactores de una matriz?
¿Cómo es la matriz traspuesta?

Ejemplo:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$¿\,Adj(A)?$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

CÁLCULO DE LA INVERSA (TEOREMA)

Si el $|A| \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

Ejemplo:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿ $|A|$?

RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama matriz RANGO de una matriz $\boldsymbol{A}$ al orden de la mayor **submatriz cuadrada de A cuyo determinante es distinto de cero**.

¡ATENCIÓN!

¡Para calcular el rango, la matriz **NO TIENE** POR QUÉ SER CUADRADA!

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$¿\,Rango\ de\ A?$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿VERDADERO O FALSO?

- $|A| = 0$
- La matriz A no tiene inversa
- La matriz B tiene inversa
- El rango de A es 3
- El rango de B es 2

Matemática

Clase 5 – Martes 18-4

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

5	17-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. R-F	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	
6	24-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. Métodos de resolución	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	
7	1-may	Tema 5: Sistemas de ecuaciones Mixtos	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	lunes 1/5 feriado

SISTEMAS DE ECUACIONES

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué es un sistema de ecuaciones?

Es un conjunto de ecuaciones

Ejemplos:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = -y^2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -\dfrac{1}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

¡¡¡Las LLAVES SON ESENCIALES!!!!

¿Por qué?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Qué es resolver un sistema?

ES BUSCAR, SI EXISTEN, EL O LOS VALORES DE LAS INCÓGNITAS QUE **VERIFICAN <u>TODAS</u> LAS ECUACIONES DEL SISTEMA**

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Qué es la solución de un sistema?

ES EL **CONJUNTO DE NÚMEROS** $(\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \ldots, \boldsymbol{s_n})$ QUE REEMPLAZADOS EN LAS INCÓGNITAS $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **HACEN VERDADERAS <u>TODAS LAS ECUACIONES SIMULTÁNEAMENTE.</u>**

Ejemplos:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = -y^2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

¿Es (0,2) solución del sistema?

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

¿Es (2,1) solución del sistema?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 = y \end{cases}$$

¿Es (1,1) solución del sistema?

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -\dfrac{1}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

¿Es $(2, -\frac{3}{2})$ solución del sistema?

Vamos a ver dos tipos de sistemas de ecuaciones

- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones mixtos

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales

Ecuaciones de primer grado

Las variables (incógnitas) aparecen elevadas a la potencia 1

Así escribimos los sistemas lineales...

Este es un sistema de ecuaciones lineales de **m ecuaciones con n incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Coeficientes (números reales)

Incógnitas

Términos independientes (números reales)

Ejemplo 1:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -\dfrac{1}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

¿Cuántas ecuaciones e incógnitas tienen estos sistemas?

Ejemplo 3:
$$\begin{cases} 2 + x = 3 + y \\ 5 - x = 2 + y \\ 5 + x = 4 + y \end{cases}$$

Dos cosas nos interesan de estos sistemas…

- Estudiar la **existencia** de soluciones
- Estudiar **métodos** para hallar las soluciones

Empecemos con el tema de la **existencia** de soluciones

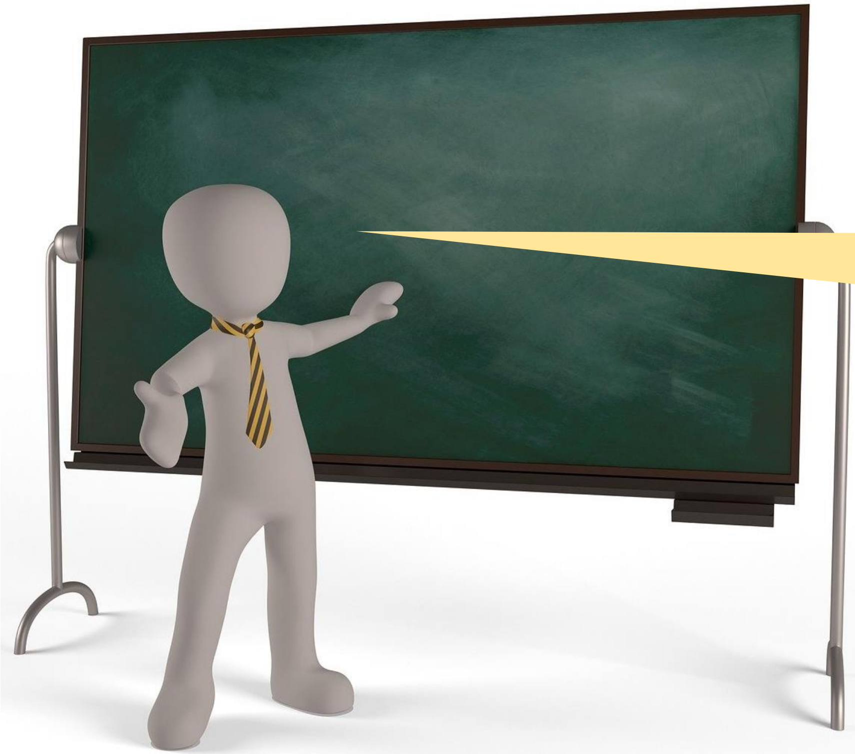
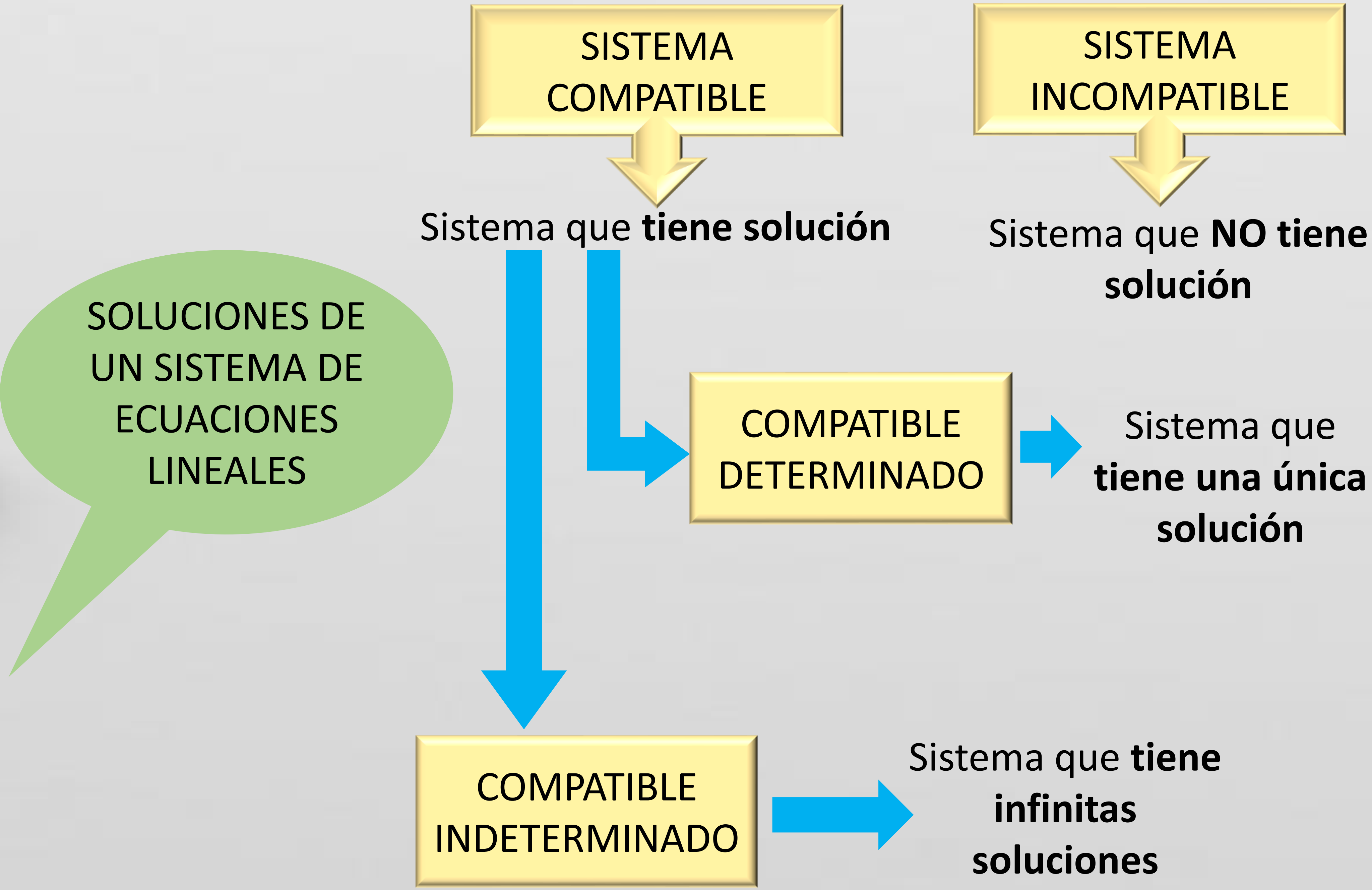


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener:

- ✓ Solución única.
- ✓ Infinitas soluciones.
- ✓ Ninguna solución.

Y de acuerdo a ellas, el sistema recibe distintos nombres…


SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES
SISTEMA COMPATIBLE
Sistema que **tiene solución**
SISTEMA INCOMPATIBLE
Sistema que **NO tiene solución**
COMPATIBLE DETERMINADO
Sistema que **tiene una única solución**
COMPATIBLE INDETERMINADO
Sistema que **tiene infinitas soluciones**

Veamos algunos ejemplos de sistemas de sistemas de ecuaciones lineales que ya saben resolver...

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ 4x_1 - 3x_2 = & 6 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ -4x_1 - 6x_2 = & -24 \end{cases}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ 4x_1 + 6x_2 = & 6 \end{cases}$$

Vamos a ver un Teorema que nos permite decidir, **SIN RESOLVER EL SISTEMA**, qué tipo de soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales, que se llama Teorema de Rouché-Frobenius

Pero antes vamos a ver algunas definiciones!!!

Dado el sistema de ecuaciones lineales, de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos escribirlo así…

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN **FORMA MATRICIAL**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Forma Matricial de Sistemas Lineales

MATRIZ DEL SISTEMA

formada por los coeficientes del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE LAS INCÓGNITAS

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Forma Matricial de Sistemas Lineales

MATRIZ AMPLIADA DEL SISTEMA

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Elementos de la matriz A}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{Términos independientes}}$

Elementos de la matriz A

Términos independientes

Ejemplo 1: $\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$

Identificar las matrices de cada uno de estos sistemas.

Ejemplo 2: $\begin{cases} 2x + 3y - z = -\frac{1}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Expresar cada uno de los sistemas mediante su forma matricial

Ejemplo 3: $\begin{cases} 2 + x = 3 + y \\ 5 - x = 2 + y \\ 5 + x = 4 + y \end{cases}$

Escribir la matriz ampliada de cada uno de estos sistemas

Nos podemos peguntar: si conocemos la forma matricial de un sistema lineal... ¿podemos reconstruir el sistema asociado?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\boxed{A \cdot X = B}}$$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

¡Recordar producto de matrices e igualdad de matrices

Ejemplo 4:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

La matriz A* es la matriz ampliada de un cierto sistema lineal

¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tiene el sistema?

Escribir el sistema correspondiente.

Ahora sí podemos enunciar el
Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema de Rouché-Frobenius

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga al menos una solución que el rango de la matriz del sistema (A) sea igual al rango de la matriz ampliada del mismo (A*).

Teorema de Rouché-Frobenius y sus Corolarios

COROLARIOS del Teorema de R-F:

Sea un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas, A la matriz y A^* la matriz ampliada del mismo, entonces:

1. Si $rango(A) = rango(A^*) = n$, entonces el sistema tiene **solución única** (SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO).
2. Si $rango(A) = rango(A^*) < n$, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones** (SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO).
3. Si $rango(A) \neq rango(A^*)$, entonces el sistema **no tiene solución** (SISTEMA INCOMPATIBLE).

Utilizando el Teorema de Rouché Frobenius y sus corolarios, decidir si tiene solución o no y si tiene, si es única o tiene infinitas

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -\dfrac{1}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} 2 + x = 3 + y \\ 5 - x = 2 + y \\ 5 + x = 4 + y \end{cases}$$

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 4:

Determinar, usando el Teorema de Rouché Frobenius y sus corolarios, el valor que debe tomar el parámetro k para que el siguiente sistema tenga solución única, tenga infinitas soluciones o no tenga solución:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Ya resolvimos los siguientes sistemas:

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 5:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ 4x_1 - 3x_2 = & 6 \end{cases}$$
Solución única (Sistema compatible determinado)

Ejemplo 6:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ -4x_1 - 6x_2 = & -24 \end{cases}$$
Infinitas soluciones (Sistema compatible indeterminado)

Ejemplo 7:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 12 \\ 4x_1 + 6x_2 = & 6 \end{cases}$$
Sin solución (Sistema incompatible)

Usen el Teorema de Rouché-Frobenius para corroborar los resultados.

Matemática

Clase 6 – Martes 25-4

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

5	17-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. R-F	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	
6	24-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. Métodos de resolución	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	
7	1-may	Tema 5: Sistemas de ecuaciones Mixtos	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones	lunes 1/5 feriado

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Recordamos lo visto la clase pasada sobre sistemas de ecuaciones lineales…

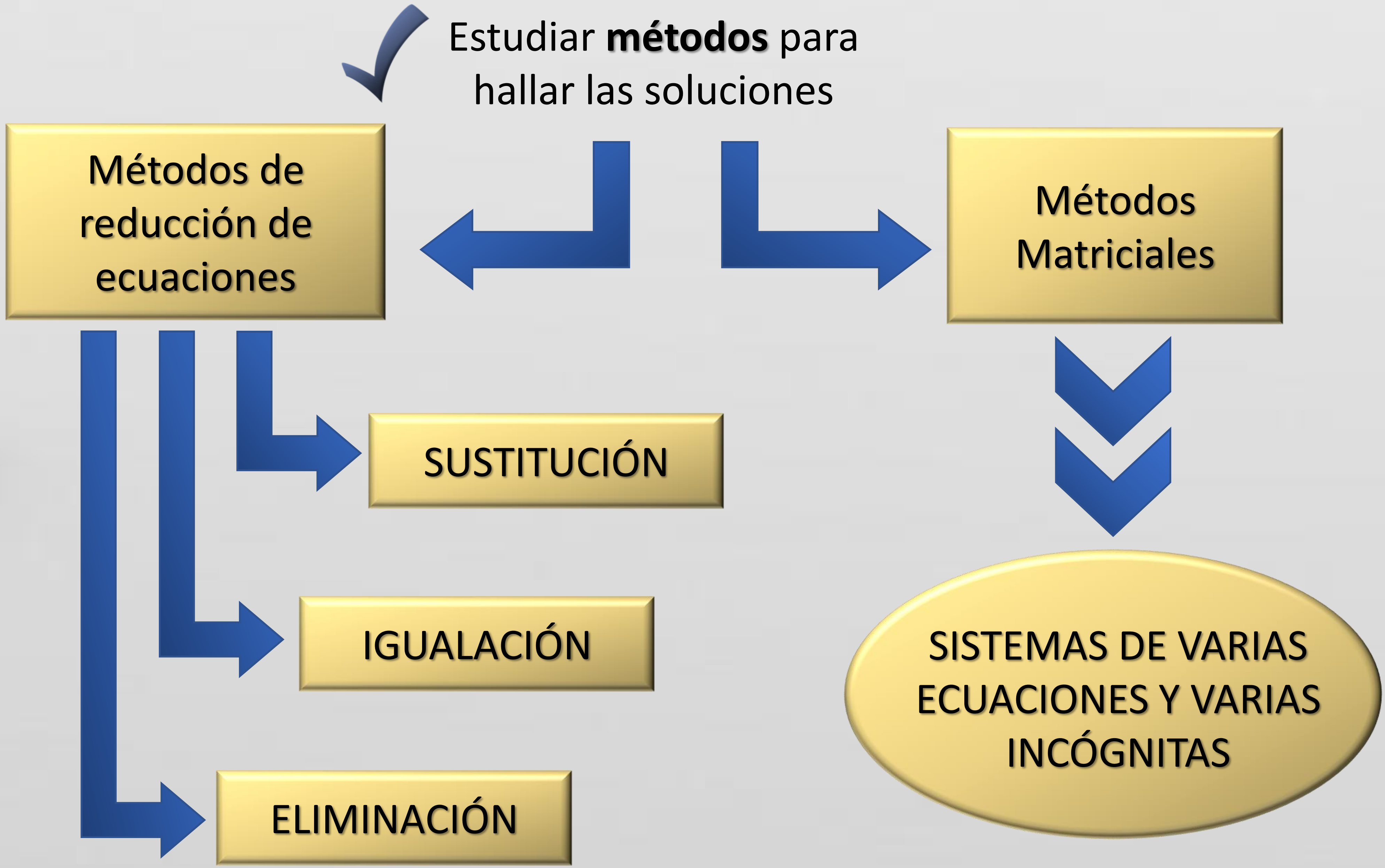
- ✓ **Qué es** un sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ **Cómo escribir** un sistema de ecuaciones lineales de acuerdo a la cantidad de incógnitas y ecuaciones.
- ✓ **Qué es** resolver un sistema.
- ✓ **Cómo es** la solución de un sistema.
- ✓ **Qué tipo** de soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ **Cómo escribir** un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.
- ✓ **Qué es** la matriz ampliada de una sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ **Un Teorema (y su corolario)** que permiten decidir qué tipo de soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales dado.

Habíamos dicho que nos interesan dos cosas…

LO VIMOS LA CLASE PASADA!

- Estudiar la **existencia** de soluciones

- Estudiar **métodos** para hallar las soluciones


Estudiar **métodos** para hallar las soluciones
Métodos de reducción de ecuaciones
Métodos Matriciales
SUSTITUCIÓN
IGUALACIÓN
ELIMINACIÓN
SISTEMAS DE VARIAS ECUACIONES Y VARIAS INCÓGNITAS

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

REGLA DE CRAMER

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

REGLA DE CRAMER

Sea un sistema de ecuaciones lineales, con matriz asociada $\mathbf{A}$, que cumple:

- ✓ tiene **n ecuaciones** y **n incógnitas**,
- ✓ el $\det(A) \neq 0$

La solución se puede calcular como:

$$x_i = \frac{|A^{(i)}|}{|A|}, i = 1, \dots, n$$

$\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{i})}$ es una matriz que se obtiene de la matriz $\boldsymbol{A}$, remplazando la columna $\boldsymbol{i}$ por la columna de los términos independientes.

REGLA DE CRAMER

Sea un sistema de ecuaciones lineales, con matriz asociada $\mathbf{A}$, que cumple:

- ✓ tiene **n ecuaciones** y **n incógnitas**,
- ✓ el $\det(A) \neq 0$

¿Cómo sabemos que el sistema tiene solución?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 1:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

Resolver utilizando la Regla de Cramer

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 13 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3:
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Sea un sistema de ecuaciones lineales, con matriz asociada $\mathbf{A}$. El sistema se pude escribir en su forma matricial como $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

Si el sistema cumple que:

- ✓ tiene **n ecuaciones** y **n incógnitas**,
- ✓ el $\det(A) \neq 0$

Entonces existe $\boldsymbol{A}^{-1}$ y la solución del sistema es:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$$

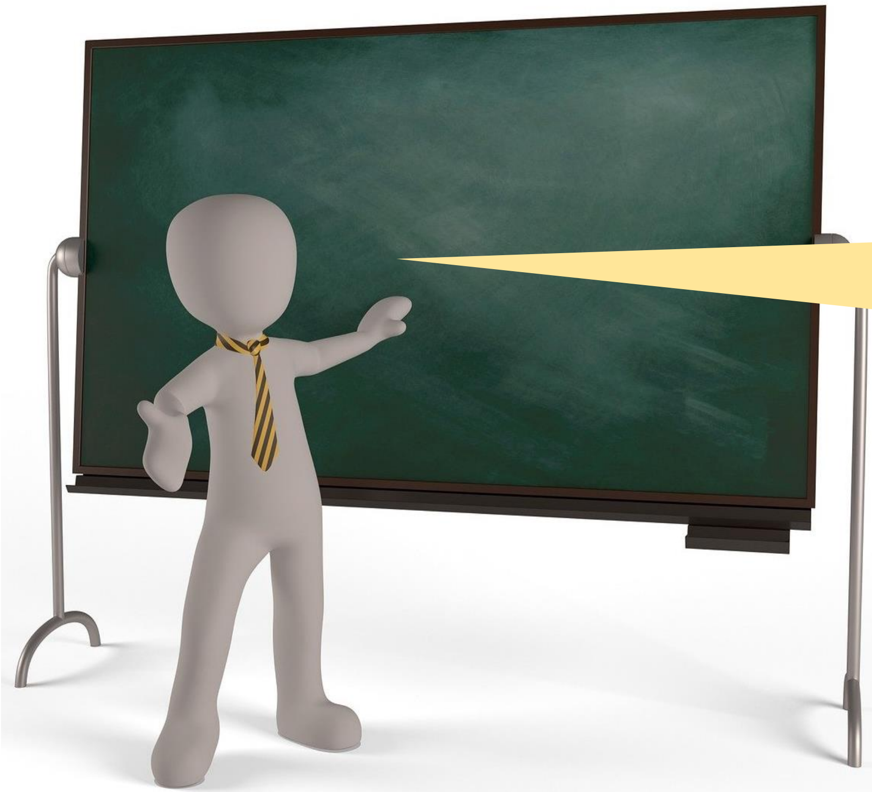
Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 13 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Volver a resolver el ejemplo 2, esta vez mediante método de la matriz inversa

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN



¡¡Antes vamos a ver algunas definiciones!!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

SISTEMAS EQUIVALENTES

Diremos que un sistema es equivalente a otro sistema cuando ambos tienen el mismo conjunto solución.

OPERACIONES ELEMENTALES

$$\underbrace{\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}}_{\text{SISTEMA ORIGINAL}} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots & + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \vdots \quad \ddots & \quad \vdots \\ a'_{m1}x_1 + \cdots & + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}}_{\text{SISTEMA EQUIVALENTE}}$$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Qué son las **operaciones elementales**?

¡¡¡Lo vemos con un ejemplo!!!

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Ejemplo 4: $\begin{cases} -2x = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

Ejemplo 5: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Utilizar el método de reducción de variables (por ejemplo por eliminación) y reescribir el sistema

Escribir la matriz ampliada del sistema equivalente en cada paso

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE UNA MATRIZ

Son operaciones que se realizan sobre la matriz ampliada, pueden ser:

1. Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
2. Intercambiar dos filas cualesquiera.
3. Sumar (o restar) a una fila otra fila multiplicada por un número

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{A \cdot X = B}$$

Al realizar operaciones elementales sobre su matriz ampliada ($\boldsymbol{A^*}$), se obtiene la matriz ampliada de otro sistema de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{A' \cdot X = B'}$$

El nuevo sistema es equivalente al dado y por lo tanto tienen el mismo conjunto solución.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

¿ENTONCES, CÓMO SERÍA?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

OPERACIONES ELEMENTALES

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Matriz ampliada del sistema $A \cdot X = B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} & b' \end{array}\right)$$

Matriz ampliada de $A' \cdot X = B'$

Como los sistemas son equivalentes, entonces tienen la misma solución

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

¡¡¡EL OBJETIVO ES LLEGAR A UN SISTEMA EQUIVALENTE AL DADO PERO MÁS SENCILLO DE RESOLVER!!!

¡¡¡Lo vemos con un ejemplo!!!

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 13 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Volver a resolver el ejemplo 2, esta vez mediante el método de eliminación de Gauss - Jordan

Matemática

Clase 7 – Martes 2-5

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

5	17-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. R-F	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones
6	24-abr	Tema 4: Sistema de ecuaciones lineales. Métodos de resolución	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones
7	1-may	Tema 5: Sistemas de ecuaciones Mixtos	Trabajo Práctico N°3: Sistemas de ecuaciones

SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTOS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué es un sistema de ecuaciones mixtos?

Un **sistema de ecuaciones mixtos** es un conjunto de ecuaciones en el cual **al menos una de las ecuaciones es no lineal**

Ejemplos:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = -y^2 \\ -x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2 = (x-1)^2 \\ y + 1 = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 = y \end{cases}$$

LAS ECUACIONES MIXTAS QUE VAMOS A VER SON AQUELLAS EN LAS QUE UNA O DOS DE LAS ECUACIONES SON CUADRÁTICAS Y LA RESTANTE (SI HAY) ES LINEAL

¿VERDADERO O FALSO?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$\begin{cases} x^2 - 4 = -y^2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

(-2,0) y (2,0) son solución de sistema

$$\begin{cases} y - 2 = (x-1)^2 \\ y + 1 = 2x \end{cases}$$

(2,3) es solución de sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 = y \end{cases}$$

(1,1) es solución de sistema

Un sistema de **ecuaciones lineales** puede tener:

- ✓ Solución única.
- ✓ Infinitas soluciones.
- ✓ Ninguna solución.

Para los sistemas lineales vimos

Pero, los sistemas mixtos….
¿cuántas soluciones tendrán?

La cantidad de soluciones de un sistema mixto **depende del tipo de ecuaciones** que tiene el sistema

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Cómo vamos a resolver un sistema de ecuaciones mixtos?

En general vamos a usar el método de sustitución o eliminación.

Ejemplos:

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$\begin{cases} x^2 - 4 = -y^2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2 = (x-1)^2 \\ y + 1 = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

Resolver los sistemas